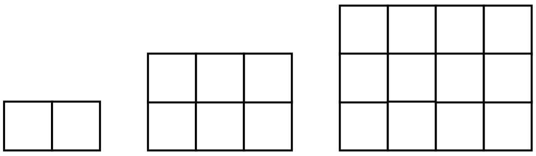
MIT WÜRFELN BAUEN: ZAHLENFOLGEN ENTDECKEN

Thema:	Zahlenfolgen (Dreieckszahlen, Quadratzahlen,...) geometrisch darstellen und in Wertetabellen beschreiben.
Klassen:	3. bis 5. Klasse (z.B. zu Zahlenbuch 3 Seite 71)
Material:	Arbeitsblätter und Holzwürfel je Schülerin / je Schüler
Dauer:	1 bis 2 Lektionen
Bearbeitung:	B. Hoffmann, E. Dürrenberger, M. Beeler, I. Lötscher, E. Hengartner (02.02)

Aufgabe

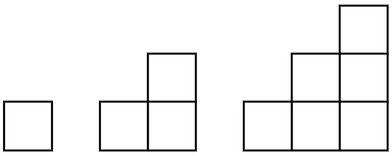
„Fastquadrate“



Höhe	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10			20*
Anzahl													

a. Baue weitere Figuren und fülle die Tabellen aus.
b. Wie wächst die Anzahl Würfel? Beschreibe deine Beobachtungen.

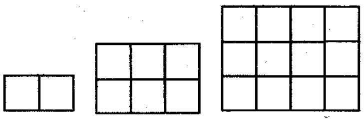
Treppen



Höhe	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10			20*
Anzahl													

a. Baue weitere Figuren und fülle die Tabellen aus.
b. Wie wächst die Anzahl Würfel? Beschreibe deine Beobachtungen.

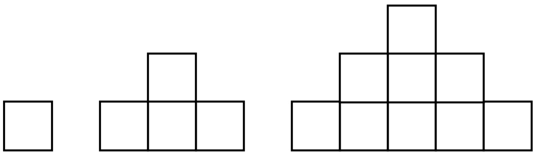
c. Fast-Quadrate



Höhe	1	2	3	4	5	6	7	8	20!
Anzahl	2	6	12	20	30	42	56	72	420

Ich habe die zahl der Höhegenomen und immer + einz gerechet Ich habe sie mal gerechet.

Doppeltreppen



Höhe	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10				20*
Anzahl														

a. Baue weitere Figuren und fülle die Tabellen aus.
b. Wie wächst die Anzahl Würfel? Beschreibe deine Beobachtungen.

Erfinde selbst eine Reihe von Figuren.

Worum es geht

Die Kinder setzen mit Holzwürfeln Gebilde fort, welche grundlegende Zahlenfolgen darstellen: die Folgen der Dreieckszahlen, der Quadratzahlen und Rechteckzahlen

Für die einfache aufsteigende *Treppe* werden von Stufe zu Stufe +2, +3, +4, +5, +6, ... zusätzliche Würfel gebraucht. Als Ergebnis entsteht in der Tabelle unter Anzahl benötigter Würfel die Folge der *Dreieckszahlen*: 1+2=3, 1+2+3=6, 1+2+3+4=10, 1+2+3+4+5=15 usw.

Für die *Doppeltreppe* mit auf- und absteigenden Stufen werden mit wachsender Höhe +3, +5, +7, +9, +11, ... weitere Würfel gebraucht. Zu jeder Höhe entsteht in der Zeile „Anzahl“ der Tabelle die entsprechende *Quadratzahl*: Zur Höhe zwei nämlich 2x2=4 Würfel, zur Höhe drei 9, zur Höhe vier 16, zur Höhe fünf 25, zur Höhe sechs 36 Würfel usw.
Werden die Würfel der absteigenden Treppe auf die Stufen der aufsteigenden umgelegt, werden die Quadrate sichtbar. Das Umlegen kann auch deutlich machen, dass es sich jeweils um die Summe zweier aufeinanderfolgender Dreieckszahlen handelt. Die Doppeltreppe der Höhe fünf etwa setzt sich aus einfachen Treppen mit 10 und 15 Würfeln zusammen.

Die *rechteckigen Gebilde* 1x2, 2x3, 3x4, 4x5, ...nennen wir hier (in Anlehnung an das Zahlenbuch) „Fastquadrate“: Für sie werden mit zunehmender Höhe von Gebilde zu Gebilde +2, +4, +6, +8, +10, ... zusätzliche Würfel benötigt. Es entsteht die Folge der sogenannten *Rechteckzahlen*.

Für ein „Fastquadrat“ der Höhe n braucht es stets n Würfel mehr als für die Doppeltreppe der Höhe n. Bei Höhe 4 zum Beispiel hat das Fastquadrat vier Würfel mehr als die Doppeltreppe gleicher Höhe, bei Höhe 5 fünf Würfel mehr und bei Höhe 6 sechs Würfel mehr. Der Zusammenhang wird deutlich, wenn man „Fastquadrate“ in Doppeltreppen verwandelt.

Aus der fortgesetzten Addition der natürlichen Zahlen entsteht die Folge der Dreieckszahlen.
Aus der fortgesetzten Addition der ungeraden Zahlen entsteht die Folge der Quadratzahlen.
Aus der fortgesetzten Addition der geraden Zahlen entsteht die Folge der Rechteckzahlen.
Diese Zahlenfolgen bilden Muster, welche vielen produktiven Übungsaufgaben im Zahlenbuch zugrunde liegen.

Wie kann man vorgehen?

Diese Lernumgebung sollte man sehr sorgfältig und anschaulich einführen, damit die Kinder anschliessend möglichst selbständig arbeiten können. Wir haben die Klasse um einen Tisch versammelt und für jede Figurenreihe die ersten drei Figuren gemeinsam gelegt und besprochen. Dabei haben wir die jeweiligen Merkmale (Fastquadrat, Doppeltreppe, Treppe) ausführlich besprochen. Dann haben wir den Aufbau des Arbeitsblattes erklärt: Nach der ersten Erprobung haben wir die Fastquadrate an den Anfang gestellt, weil die Kinder damit am leichtesten zurecht kamen. Wir haben die Kinder aufgefordert, Regelmässigkeiten zwischen der Höhe und der Anzahl benötigter Würfel zu suchen und zu beschreiben. Die Höhe 20 haben wir dazu genommen, um sie herauszufordern, das Bildungsgesetz der Zahlenfolge zu entdecken. Da die benötigte Menge Würfel fehlt, lässt sie sich nur bestimmen, wenn man das Bildungsgesetz der Figurenreihe auch quantitativ verstanden hat. Die Kinder sind deshalb darauf angewiesen, die Anzahl (rekursiv oder funktional) zu berechnen..

Nun stellten wir folgende Aufträge:

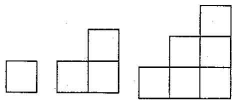
- Zuerst baut ihr die Figuren nach. Die Höhe der Figuren könnt ihr der Tabelle entnehmen.
- Dann zählt ihr die einzelnen Würfel der Figur und schreibt das Resultat in die Tabelle.

- Vergleicht eure Resultate in der Tabelle. Entdeckt ihr eine Regelmässigkeit zwischen den Lösungen? Was fällt euch auf? Schreibt eure Beobachtungen aufs Blatt.
- Wer Lust hat, eine knifflige Aufgabe zu lösen, kann ausrechnen, wie viele Würfel für einen Turm mit einer Höhe von 20 Stufen benötigt würden.
- In Aufgabe 4 könnt ihr schliesslich ein eigenes Gebilde bauen und untersuchen.

Schülerdokumente zur aufsteigenden Treppe

Das Bildungsgesetz für die Folge der Dreieckszahlen schien vielen Kindern aus dem Bauvorgang der Treppen ersichtlich: Mit jeder neuen Stufe wird zur bisherigen Anzahl gebrauchter Würfel die Höhenzahl addiert. Andreas und Olivia formulieren dies unterschiedlich; beide verallgemeinern das Bildungsgesetz aber durch die Wörter „immer“ und „undsoweiter“.

Andreas



1. Treppe

Höhe	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Anzahl	1	3	6	10	15	21	28	36	45	55	66

- Wie wächst die Anzahl Würfel ? Beschreibe deine Beobachtungen.

Man muss immer Plus diese Zahl rechnen, die die höhe hat

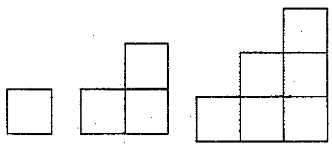
Höhe	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Anzahl	1	3	6	10	15	21	28	36	45	55	66

- Wie wächst die Anzahl Würfel ? Beschreibe deine Beobachtungen.

1Anzahl + 2Höhe = Ergebnis
2Anzahl+3Höhe = Ergebnis
undsoweiter

Allgemeiner: Die Zahlenfolge entsteht durch fortgesetzte Addition der natürlichen Zahlen – so drückt es Léa aus. Sie hat vermutlich einen weiteren Zusammenhang entdeckt, den sie nicht ganz auszudrücken vermag: „Wenn man die Höhe mal rechnet, dann ist die Hälfte immer die Anzahl“. Sie meint vermutlich: „Wenn man die Höhe mal die nächst folgende Höhe rechnet, dann...“.

Léa



1. Treppe

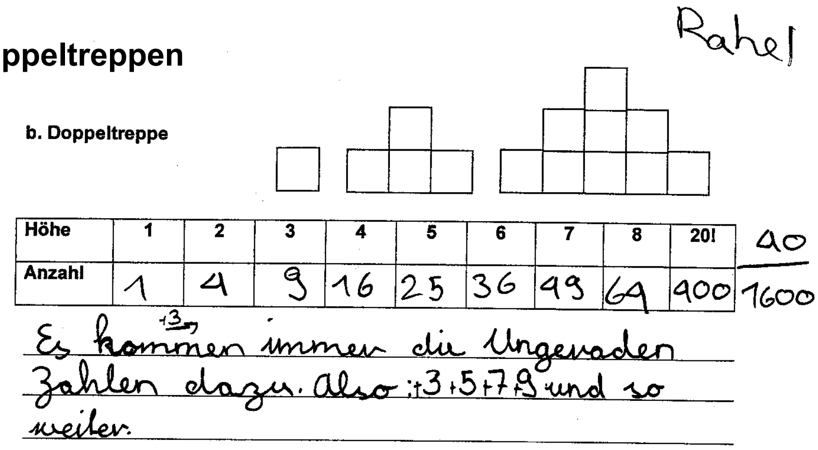
Höhe	1	2	3	4	5	6	7	8			
Anzahl	1	3	6	10	15	21	28	36			

- Wie wächst die Anzahl Würfel ? Beschreibe deine Beobachtungen.

Es ist immer + 1 mehr zb. 1+2=3 3+3=6 6+4=10 10+5=15
Wen man die Höhe mal rechnet dan ist die helfte immer die anzahl

Schülerdokumente zu Doppeltreppen

Rahel achtet auf die Unterschiede zwischen den Würfelanzahlen: Diese nehmen um die Folge der ungeraden Zahlen zu.

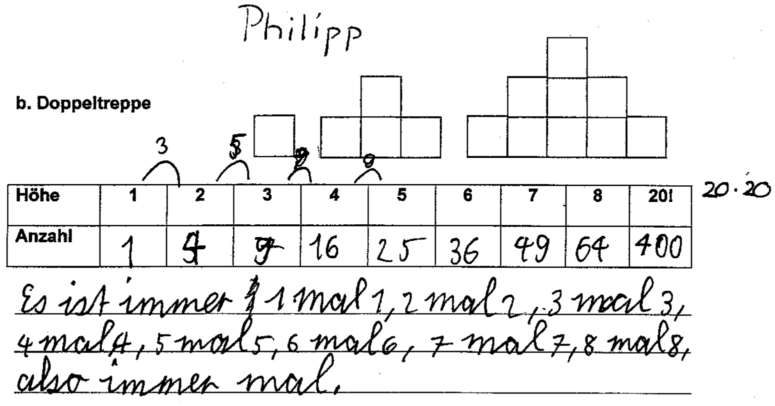

Rahel

b. Doppeltreppe

Höhe	1	2	3	4	5	6	7	8	20!	40
Anzahl	1	4	9	16	25	36	49	64	400	1600

Es kommen immer die Ungeraden Zahlen dazu. Also +3 +5 +7 +9 und so weiter.

Philipp vergleicht die Zahlen der Treppenhöhen mit den Anzahlen benötigter Würfel. Er entdeckt, dass die Anzahlen Quadratzahlen der Höhenzahlen sind


Philipp

b. Doppeltreppe

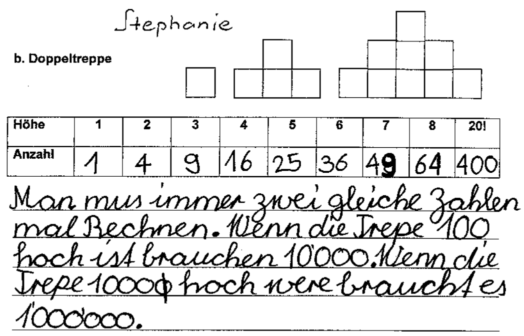
3 5 7 9

Höhe	1	2	3	4	5	6	7	8	20!
Anzahl	1	4	9	16	25	36	49	64	400

20·20

Es ist immer 1 mal 1, 2 mal 2, 3 mal 3, 4 mal 4, 5 mal 5, 6 mal 6, 7 mal 7, 8 mal 8, also immer mal.

Stephanie umschreibt den gleichen Sachverhalt. Sie verallgemeinert die Beziehung und berechnet die (Quadrat-)Zahlen für 100 und 1000 Würfel hohe Treppen.

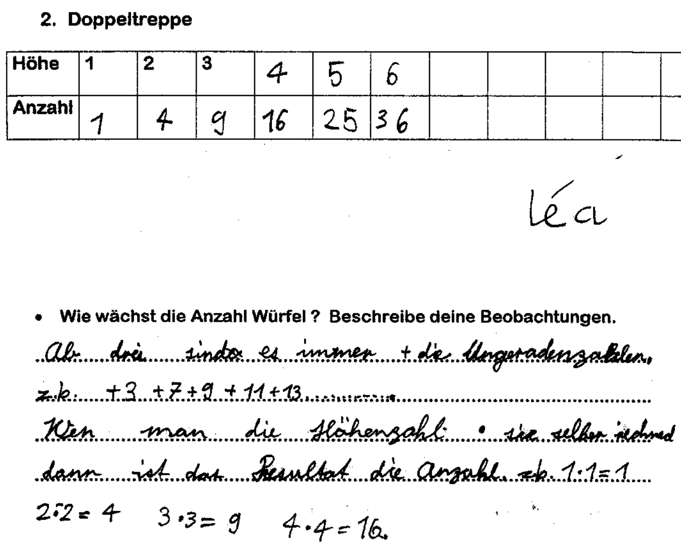

Stephanie

b. Doppeltreppe

Höhe	1	2	3	4	5	6	7	8	20!
Anzahl	1	4	9	16	25	36	49	64	400

Man mus immer zwei gleiche Zahlen mal Rechnen. Wenn die Trepe 100 hoch ist brauchen 10000. Wenn die Trepe 1000 hoch were braucht es 1000000.

Die Beschreibung von *Léa* schliesslich umfasst beide Regeln: Jene für die Bildung der Zahlenfolge (der Quadratzahlen) und die Beziehung zwischen den Wertepaaren „Höhe und Würfelanzahl". Sie ist fähig zur rekursiven und zur funktionalen Betrachtung der Wertetabelle.


2. Doppeltreppe

Höhe	1	2	3	4	5	6					
Anzahl	1	4	9	16	25	36					

Léa

- Wie wächst die Anzahl Würfel ? Beschreibe deine Beobachtungen.

Ab drei sind es immer + die Ungeradenzahlen. z.b. +3 +7 +9 +11 +13 ....

Wen man die Höhenzahl • sie selber rechned dann ist das Resultat die anzahl. z.b. 1·1=1

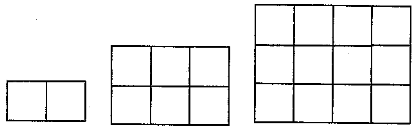
2·2 = 4 3·3 = 9 4·4 = 16.

Schülerdokumente zu Fastquadraten

Auch bei der Beschreibung der Rechteckzahlen (der „Fastquadrate“) kamen beide Betrachtungsarten vor. In den ersten zwei Dokumenten steht die Beschreibung des Zuwachses von Würfelanzahlen von Bau zu Bau im Vordergrund, also eine eher rekursive Betrachtung.

In den folgenden drei Dokumenten wird der Zusammenhang zischen den Wertepaaren „Höhe“ und „Anzahlen von Würfeln“ beschrieben.

c. Fast-Quadrate



Höhe	1	2	3	4	5	6	7	8	20!
Anzahl	2	6	12	20	30	42	56	72	420

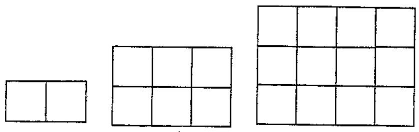
+4 +6 +8 +10 12 14 16

4 6 8 10 12 14 16

Höhe	1	2	3	4	5	6	7	8	20!
Anzahl	2	6	12	20	30	42	56	72	420

Es ist immer zwei Zahlen mehr, 4, 6, 8, 10, 12, 14, bis auf 16 immer so.

c. Fast-Quadrate



Höhe	1	2	3	4	5	6	7	8	20!
Anzahl	2	6	12	20	30	42	56	72	420

Ich habe die zahl der Höhegenomen und immer + einz gerechet. Ich habe sie mal gerechnet.

Höhe	1	2	3	4	5	6	7	8	20!
Anzahl	2	6	12	20	~~24~~ 30	42	56	72	420

immer die Höhe und die Breite zusammen rechnen.

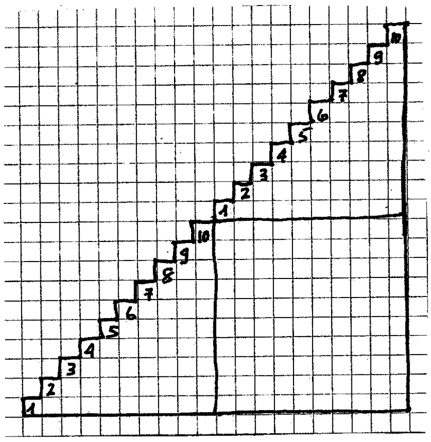
Höhe	1	2	3	4	5	6	7	8	20!	40
Anzahl	2	6	12	20	30	42	56	72	420	1640

immer 1·2 2·3 3·4 5·6 6·7 8·9 so haben wirs gemacht

Interview mit Kerstin: Ein Unterrichtsprotokoll zur Treppe

Kerstin baut immer höhere Treppen und trägt die Würfelanzahlen laufend in die Tabelle ein. Dabei zählt sie jedesmal zur Anzahl Würfel der vorangegangenen Treppe die Zahl der eben gelegten dazu: Zur vierstufigen Treppe mit 10 Würfel die 5 neuen, zu 15 die 6 weiteren, zu 21 die 7 neuen usw.

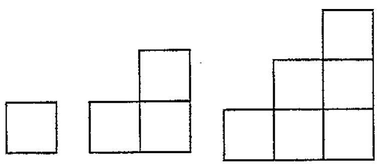
Kerstin baut Treppen bis zur Höhe 10 und schreibt unter Würfelanzahl 55 in die Tabelle. Als sie als nächstes die Treppenhöhe 20 sieht, stutzt sie und fragt mich: "Wie kann ich das ausrechnen?" Bevor ich etwas antworte sagt sie: "Ah, das sind doppelt so viele!" Da ich nichts entgegne, zögert sie. "Stimmt gar nicht!", merkt sie an. Da sie diese Aufgabe lösen möchte, versuche ich ihr mit einem Tipp zu helfen. Ich frage sie: "Wie hast du denn bisher gerechnet?" Kerstin antwortet: "Ja, + 2, + 3, + 4, + 5, usw." Sie überlegt längere Zeit schweigend. Plötzlich wiederholt sie, dass 20 das Doppelte von 10 ist, also ist das Resultat 2 x 55, beträgt also 110!



Ich skizziere die Treppe mit 10 Stufen auf ein kariertes Blatt und fordere sie auf, die Treppe um zehn weiteren Stufen zu ergänzen. Sie zeichnet es auf und merkt plötzlich, dass es dazu viel mehr Würfel braucht als das Doppelte. Ich zeichne zur zehnten Stufe eine senkrechte und eine waagrechte Linie: Es entstehen ein Quadrat und zwei 10-stufige Treppen. Ich schraffiere die beiden symmetrischenTreppen. Obwohl Kerstin sieht, dass die beiden Treppen gleich gross sind, trägt sie für jede Stufe die Anzahl Würfel ein. Sie zählt 1 bis 10 zusammen und kommt auf 55 Würfel. Ihr ist nicht klar, wie sie nun die Anzahl Würfel der quadratischen Fläche errechnen soll. Meine Frage nach der Höhe und der Breite kann Kerstin dann aber problemlos beantworten. Nun addiert sie und kommt auf das richtige Resultat: 55 + 55 + 100 = 210.

Zur Kontrolle der Ergebnisse schreibt Kerstin die Unterschiede zwischen den Würfelanzahlen aufs Blatt. Sie entdeckt die Regelmässigkeit. Für die Treppen bis 20 Stufen zeichnet Kerstin eine weitere Tabelle. In kürzester Zeit hat sie alle Ergebnisse eingetragen. Mit grosser Freude stellt sie fest, dass sie im letzten Kästchen wieder auf die Zahl 210 kommt! Nach der Lektion erklärt Kerstin, dass ihr diese Stunde grossen Spass gemacht habe. Ihr habe das Bauen und das Rechnen gefallen.

a. Treppe



Höhe	1	2	3	4	5	6	7	8	20!
Anzahl	1	3	6	10	15	21	28	36	210

+2 +3 +4 +5 +6 +7 +8

10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
55	66	78	91	105	120	136	153	171	190	210

+11 +12 +13 +14 +15 +16 +17 +18 [illegible] +20